Konvergens - mindre “att” och mera “hur”!

Från undervisare i högre årskurs får vi nu veta att studenternas kunskaper om serier är ett fullkomligt godtyckligt kaos. Problemet är ställt. Är det (entydigt) lösbart och hur är det med stabiliteten?

Frågan är förstås om studenternas svårigheter och förvirring är så mycket annorlunda mot det övriga innehållet i kurserna. Gymnasievanan är ofta den att härma lärarens armrörelser så troget det går; därmed skapas ett nästan obegränsat utrymme för missförstånd. Att definitioner sedan länge är överkurs är ingen hjälp, precis.

Ändå tror jag att man, som så många gånger i det förgångna, måste fråga om studenterna *någonsin* begripit särskilt mycket, och om den levererade, eller önskade, kunskapen ens är särskilt meningsfull. Hur intressant är det veta *att* en serie konvergerar eller divergerar?

På en tenta för ett tag sen gav jag tre serieuppgifter. I en gick termerna mot noll lika fort som $1/n$. En tentand bryter ut dominanten, konstaterar att återstående faktor har ett positivt ändligt gränsvärde och drar alldeles rätt slutsats: divergens.

I en annan deluppgift går termerna mot noll som $(2/3)^n$, alltså exponentiellt. Samma student bryter ut dominanten och konstaterar att den går mot noll, således konvergens. Uppenbarligen är han inte medveten om det *starkare* beteendet hos denna serie.

Att termerna går mot noll är ett tillräckligt villkor om det är nödvändigt för att få ut uppgiften. Desperationen upphöjs till metod. Det kan delvis vara undervisningens fel.

I Neymarks konvergenskompendium ges uppgiften att avgöra konvergensen hos serierna

$$\sum \frac{k!}{k^k} \text{ samt } \sum (1+\frac{1}{k})^{-k^2}$$

Det är klassiska exempel på exponentiellt beteende. Det första exemplet är enklast åtkomligt med kvotkriteriet, det andra med rotkriteriet. I båda fallen går termerna mot noll som $(1/e)^k$

Nu är jag inte medveten om att föreläsaren skjutit upp denna diskussion till senare, så först föreslår jag metoder som studenterna inte känner igen.

I det första fallet förväntas studenterna istället se att termerna är mindre än $2/k^2$ - vilket ingen ser ens när jag skriver upp de första och sista faktorerna i varje term. Det är dessutom ointressant, eftersom man inte får en vettig resttermsuppskattning.

I det andra fallet ger jag mekaniskt samma tips som alla andra, att skriva termerna på e–bas och taylorutveckla. Det är bättre, ty då syns exponentialiteten. Men efteråt inser jag hur jag av min egen undervisning deformerats till typuppgiftstänkande. Åtminstone *jag* borde väl se *direkt* att termerna är mindre än $1/2^k$?

Jag vill ha mindre “att” och mera “hur”. Kan man av partialsummorna se *att*

$$\sum \frac{1}{n \ln n}$$

divergerar? Hur många termer ska jag ta med för att approximera

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

med en korrekt decimal?

Det är också den tankeväckande distinktion som genomsyrar Johnson-ligans Springer-böcker: kvantitativa begrepp är viktigare, användbarare och mer upplysande än kvalitativa. Lipschitzkontinuitet är elementärare än kontinuitet!

Nu är det ju lång tradition att resttermsuppskattningar behandlas som överkurs. Dvs. uppgifterna på detta är få och börjar rätt omgående på en hög nivå. Allt blir mer mystiskt än det behöver vara och jag påstår inte att det är *lätt* att skapa en varierad och progressivt stegrad uppgiftsrepertoir. Möjligen behövs datorlabbar. Möjligen borde serier vara en egen kurs.

Istället övar vi sedan decennier uppgifter där termerna "ska" taylorutvecklas så långt att någonting blir kvar före ordo och sådana uppgifter kan man variera hur mycket som helst, precis som ekvationssystem med parametriserade koefficienter och annat som inte heller har med verkligheten att göra.

Liebniz kriterium missförstås av nästan alla. Jag försöker visa mekanismen genom en spiral på föreläsningen och efteråt vet ingen något - ty bevis är *aldrig* belysande. Montonicitet blir något man påstår eller negligerar. Olikhets- och kvotjämförelser tillgripes. Och då undrar jag, utan att påstå - än mindre bevisa - något, om man inte i högre grad borde behandla Leibniz som en resttermsuppskattning?

Arcustangensserien är Leibniz i hela sitt konvergensområde. Logaritmserien är det i halva intervallet, och i den andra hittar man lätt en geometrisk uppskattning av resttermen. För övrigt samma uppskattningar som man leds till genom att integrera en geometrisk serie. Lagrange lider däremot ett smärtsamt nederlag! Sinus och cosinus är Leibniz i de intervall där de är meningsfulla att användas.

Standarduppgiften på potensserier är nu att bestämma konvergensradien och därpå undersöka de nästan alltid ointressanta randpunkterna - intressanta blir ju dessa först om man betraktar *hela* randen, i det komplexa.

Att använda potensserier finns det idag ingen tid till; frågan är om inte detta borde vara huvudsaken. Kan man minska det kvalitativa dribblandet?

Även om funktionsserier kommit i skymundan kanske man ska säga något om likformig konvergens.

Varför får man derivera potensserier termvis i det inre av konvergensintervallet? Det vanliga textboksbeviset är att gå bakvägen, via integration. Denna kan utföras termvis på grund av likformig konvergens på kompakta delintervall. Av samma skäl är summafunktionen kontinuerlig, vilket man behöver veta för att överhuvudtaget integrera.

Då använder man att termerna är kontinuerliga, fast de är hur deriverbara som helst. Jag tror att likformig konvergens är ett både överskattat och missvisande begrepp. Potensserier konvergerar inte lika likformigt på alla delintervall. Fourierserien av en kontinuerlig funktion gör det. Jag vet på rak arm ingen klart formulerad och enkelt bevisad sats om detta, men alla vet att det är så. Fourierserier är i någon mening *globala* (koefficienterna är integraler), potensserier är *lokala* (koefficienterna är derivator).

Med potensserier är det nu så att summafunktionens egenskaper kan visas relativt enkelt ad hoc. För kontinuitet enbart utnyttjar man i praktiken att termerna är deriverbara, för deriverbarhet att de är två gånger deriverbara! Att konvergensradien är oförändrad vid derivation beror på att en polynomfaktor inte kan påverka exponentialiteten hos termerna i det inre av intervallet.

Så stark är nu traditionens makt över tanken att likformig konvergens används i sammanhang där begreppet är *helt* ovidkommande. Jag har i flera läroböcker sett satsen om termvis integration av fourierserier behandlad på detta svåra sätt. (integralen ska givetvis modifieras en smula så att den verkligen blir periodisk)

Då måste man ju först bevisa likformig konvergens på kontinuitetsintervall. Det är värt att påminna om formuleringen i gamla Titschmarch: fourierserier får integreras termvis, vare sig de konvergerar eller ej. Beviset är: se!, dvs. titta på koefficienterna.