.I Analytisk teori för Bernoullipolynom. Orientering för oskulder.

.I.1 Numeriska serier.

Vi börjar med en snabbrepetition i ämnet serier. För detaljer, fler exempel, och utförligare bevis, hänvisar jag till Mats Neymarks seriekompendium, eller Växjöboken i Envariabelanalys, av Tengstrand et al (Studentlitteratur).

Vid en ytligare (första) läsning kan du ignorera motiveringarna för att serier får integreras termvis, resp. att man få gå i limes termvis. Då ser du iallafall hur resultaten går.

.I.2 Definition: Vi säger att serien

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$

är **konvergent**, med summa s, om följden av partialsummor

$$s_N = \sum_{n=p}^{N} a_n$$

konvergerar mot s. Eljes säger vi att serien är **divergent**.

.I.3 Exempel: Ett enkelt exempel på en divergent serie ges av den med termerna $a_n = (-1)^n$. Dess partialsummor $\sum_{n=0}^{N} a_n$ hoppar mellan 1 och 0. Ett mindre enkelt exempel är

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad p = 1.$$

Vi tittar på partialsummorna

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k})$$

Summan i varje parentes är $> 1/2$. Partialsumman är alltså $> 1 + k/2$, som kan bli hur stort som helst.

.I.4 Exempel: Ett klassiskt exempel på en konvergent serie är

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n}$$

Man kan nämligen dela upp varje term i partialbråk:

$$\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Partialsumman s_N blir alltså:

$$(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}) = 1 - \frac{1}{N} \to 1,\ \text{då } N \to +\infty$$

För serien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

gäller

$$s_N \le 1 + \sum \frac{1}{n^2-n} = 2 - \frac{1}{N} < 2$$

Partialsummorna bildar alltså en växande (positiva termer!) och uppåt begränsad talföljd. Serien konvergerar. Vi ska omsider bestämma dess summa.

Med liknande jämförelseargument visas att serierna

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}, \quad 2 \le k \in \mathbf{Z}$$

samtliga konvergerar (desto hellre!).

I själva verket kan k få vara en reell konstant > 1, vilket man visar med integraljämförelser. Se lämplig bok.

.I.5 Exempel: Absolut konvergens

Alla våra serier, utom den första, var positiva. När termerna växlar tecken kan subtila saker inträffa. Men ibland har man tur. Om serien

$$\sum_n |a_n|$$

konvergerar, så konvergerar även

$$\sum_n a_n$$

Man säger då att den senare serien är **absolutkonvergent**.

Serien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^k}, \quad k \ge 2$$

är absolutkonvergent, eftersom dess allmänna term till beloppet är $\le 1/n^k$.

Om serien själv konvergerar, men serien av absolutbelopp divergerar, säger man att serien är **betingat konvergent.**

Ett exempel på detta ges av

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}$$

Slår man ihop en jämn term, $n = 2k$, med nästföljande, får man

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2k(2k+1)}$$

Vips har vi en positiv serie som kan jämföras uppåt med $\sum 1/(4k^2)$ som vi redan klarat ovan (utan den extra fjärdedelsfaktorn).

Detta visar att följden av jämna partialsummor konvergerar mot ett gränsvärde s. Då gäller samma om de udda partialsummorna, eftersom termerna går mot 0.

Det vanligaste sättet att visa konvergens för denna serie beror på att den är en Leibiniz-serie: tecknen alternerar (vartannat är plus, vartannat är minus) och termernas belopp avtar mot noll. Partialsummorna rör sig då fram och tillbaka i allt snävare svängar. Följderna av jämna och udda partialsummor är monotona och begränsade (t ex av varandra) och respektive gränsvärden är lika eftersom termerna går mot noll.

.I.6 Likformig konvergens.

Likformig konvergens levererar ett enkelt tillräckligt, men långtifrån nödvändigt, villkor för att en oändlig summa ska kunna integreras termvis. Dess popularitet i grundläggande matematikkurser får förklaras med att det är relativt lätthanterligt och åskådligt.

Jag sammanfattar det viktigaste.

.I.7 Definition: Funktionsserien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \qquad a \leq x \leq b$$

säges **konvergera likformigt** mot summafunktionen $s(x)$ på det angivna intervallet om det finns en talföljd α_n sådan att

$$|s(x)-\sum_{n\leq N} f_n(x)| = |s(x)-s_N(x)| \leq \alpha_N \quad a\leq x\leq b$$

och

$$\alpha_N \to 0 \text{ då } N \to +\infty$$

Villkoret i defintionen ger förstås punktvis konvergens, dvs. konvergens för varje fixt x. Man kan föreställa sig hur partialsummorna $s_N(x)$ kryper in i ett godtyckligt smalt epsilonband, kring $s(x)$, blott antalet termer väljes tillräckligt stort.

.I.8 Sats. *Är f_n:en kontinuerliga, och konvergensen likformig, så är även summafunktionen $s(x)$ kontinuerlig.*

Bevis: Anta $s(x)$ diskontinuerlig i x_0. Då finns ett positivt ε och en talföljd $x_n \to x_0, n = 1, 2, \ldots$ med

$$|s(x_n) - s(x_0)| \geq \varepsilon, \quad \forall n$$

Då kan ingen kontinuerlig partialsumma s_N (se definitionen) uppfylla

$$|s_N(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

i någon omgivning av x_0.

Ty anta det sista. Enligt triangelolikheten vore då

$$|s(x_n) - s(x_0)| = |(s(x_n) - s_N(x_n)) + (s_N(x_n) - s_N(x_0)) + (s_N(x_0) - s(x))| <$$

$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

för tillräckligt stora n, en motsägelse. Den första och sista termen kommer av antagandet, den mellersta av partialsummans kontinuitet.

∎

Vi behöver flera gånger följande

.I.9 Sats. *Om funktionerna $f_n(x)$ är kontinuerliga och*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

med likformig konvergens på detta intervall, så är

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

dvs integrationen av summafunktionen sker termvis.

Bevis:

$$|\int_a^b (s(x) - \sum_{n \leq N} f_n(x))dx| \leq \alpha_N(b-a) \to 0$$

då $N \to +\infty$. ∎

Det enklaste kriteriet för likformig konvergens ges av Weierstraß' Majorantsats:

.I.10 Sats. *Serien* $\sum f_n(x)$ *konvergerar likformigt och absolut på* $[a, b]$ *om det finns en talföljd* $a_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ *med* $|f_n(x)| \leq a_n$, $a \leq x \leq b$ *och sådan att* $\sum a_n$ *konvergerar.*

I tillämpningen kommer vi att ha $a_n = 1/n^k, k \geq 2$. T ex serien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^k}; \qquad k \geq 2$$

konvergerar likformigt på varje intervall eftersom termerna majoreras av $1/n^2$, allmänna termen i en välkänd konvergent serie. Vi kommer att behöva veta det, dels för att kunna integrera serien, dels för att kunna visa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2} \to \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

då $x \to 0$.

Det är värt att notera att den första serie vi summerar inte är absolutkonvergent. Dess likformiga konvergens på vissa intervall kommer att fastställas på ett mer direkt sätt.

.I.11 Bernoullital och dito polynom. Repetition.

Minns att Bernoullipolynomen $B_n(x)$ ges av den exp-genererande serien

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)t^n}{n!}$$

och att Bernoullitalen definieras som $B_n = B_n(1)$.

Vi har $B_0 = 1, B_1 = -1/2$, och $B_{2k+1} = 0$ för $k \geq 1$.

Den som kan funktionsteori fastställer lätt att serien (med $x = 0$ insatt) har konvergensradie 2π eftersom singulariteterna med minsta belopp är $t = \pm 2\pi i$ (sätt nämnaren $= 0$).

Genom att derivera den genererande serien formellt m a p x visar man lätt att

$$B'_m(x) = mB_{m-1}(x) \tag{0}$$

Vidare är $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Så vi kan bestämma högre Bernoullipolynom genom upprepad integration.. Integrationskonstanten bestäms då av kravet

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \qquad n \geq 1$$

vilket man erhåller genom att *integrera* den genererande funktionen (formellt, m a p x,) från 0 till 1.

T ex är

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

I t ex Eulers summationsformel betraktar vi Bernoullipolynomen endast på intervallet $[0,1]$. Utanför detta fortsätter vi dem periodiskt. Vi kallar de så erhållna funktionerna för $\widetilde{B}_n(x)$

Alla utom B_1 får kontinuerliga fortsättningar eftersom $B_m(0) = B_m(1)$ för $m \geq 2$. Detta kan också visas med hjälp av den genererande serien. Se figurer i Betongboken, p. 473.

I teorin för Fourierserier visar man att periodiska funktioner under rätt svaga villkor kan utvecklas i trigonometriska serier.

Vi ska visa detta för de periodiska Bernoullifunktionerna med mycket direkta metoder. Den besvärligaste blir $\widetilde{B}_2$.

.I.12 Utvecklingen av $\widetilde{B}_1$

Vi börjar med ett lemma om den s k Dirichletkärnan.

.I.13 Lemma.

$$D_n(t) := \sum_{n=1}^{N} \cos 2\pi nt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} \tag{1}$$

Bevis: Multiplicera vänsterledet med $\sin \pi t$ och utnyttja

$$\sin \pi t \cos 2\pi nt = \frac{1}{2}(\sin(2n+1)\pi t - \sin(2n-1)\pi t)$$

Vi får en teleskopsumma där endast två bidrag överlever. ∎

.I.14 Lemma. *Låt $0 < x < 1$. Det gäller*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_x^{1/2} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt = 0$$

Bevis: Partialintegration ger

$$\int_x^{1/2} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt =$$

$$= \frac{1}{2N+1}\left[\frac{-\cos(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\right]_x^{1/2} - \frac{1}{2N+1}\int_x^{1/2} \frac{\pi \cos(2N+1)\pi t \cos \pi t}{\sin^2 \pi t} dt$$

Den första termen majoreras av

$$\frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin \pi x} \tag{2}$$

Den andra majoreras av

$$\frac{\pi|x-1/2|}{(2N+1)\sin^2 \pi x} \tag{3}$$

Eftersom x är fixt går båda mot noll då $N \to +\infty$ ▮

Integrera ekvation (1) från x till $1/2$. Låt $N \to +\infty$. Vi erhåller då:

.I.15 Följdsats.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = \pi(\frac{1}{2} - x) = -\pi B_1(x)$$

för $0 < x < 1$. *Konvergensen är likformig på varje slutet intervall* $[a, b]$ *där* $0 < a < b < 1$

Det sista följer om man i de båda uppskattningarna (2) och (3) byter x mot det värde av a, b som ligger längst från punkten $1/2$.

.I.16 Utveckling av $\widetilde{B}_2$.

Eftersom utvecklingen av $B_1(t)$ konvergerar likformigt på intervallet mellan $t = y$ och $t = x$, $0 < x, y < 1$, kan vi integrera termvis mellan dessa gränser. Vi erhåller, efter multiplikation med -2π

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n\pi y}{n^2} = \pi^2(x^2 - x - y^2 + y), \quad 0 < x, y < 1.$$

Eftersom serierna konvergerar likformigt på varje intervall framställer de kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$. Det gör även polynomen i högerledet. Vi har alltså likhet även om något av x och y är $=0$ eller 1.

Betrakta x som konstant och integrera med avseende på y, från 0 till 1. Termvis integration av den andra summan (tillåtet, p g a likformig konvergens!) ger resultatet 0. Vi erhåller alltså

$$\sum_{n=1} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2} = \pi^2(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \pi^2 B_2(x)$$

för $0 \le x \le 1$.

Insättning av $x = 0$ ger:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

vilket är vackert.

.I.17 . Bestämning av $B_{2k}(x), B_{2k}(0) = B_{2k}$

Vi kan nu släppa all försiktighet. Den sist funna serien konvergerar likformigt på alla intervall. Termvis integration är tillåten hur många gånger som helst, ty i varje steg erhåller vi serier som är likformigt konvergenta på varje intervall, av tidigare angivna skäl (kommentarer direkt efter I.10.)

Vi utför dessa integrationer och väljer för båda leden varje gång den primitiv vars integral från 0 till 1 är $= 0$. Resultatet blir:

$$\frac{(-1)^{k+1}\cdot \widetilde{B}_{2k}(x)(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^{2k}}; \quad k \geq 1$$

för godtyckligt x.

Faktorn $(2k)!$ härrör från identiteten (0) ovan.

Faktorn $(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}$ kommer av den upprepade integrationen av cosinusfunktionerna.

Insättning av $x = 0$ ger så de klassiska sambanden:

$$\frac{(-1)^{k+1}\cdot (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

Vi isolerar lite termer i högerledet:

$$1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \ldots + \frac{1}{m^{2k}} + \sum_{n=m+1} \frac{1}{n^{2k}}$$

Den sista summan, vår restterm, kan skrivas

$$\frac{1}{(m+1)^{2k}} \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{(m+1)^{2k}}{n^{2k}}$$

Den andra faktorn begränsas uppåt av värdet för $k = 1$, ty samtliga termer i summan avtar med växande k. Hela resttermen är alltså

$$\mathcal{O}(\frac{1}{(m+1)^{2k}}) \qquad \text{för stora } k$$

Detta är den asymptotik som ges i tabellen på sidan 452 i Betongboken (för $m = 3$).