.I Variabelbyte i dubbelintegraler

Satsen om variabelbyte i dubblelintegraler är den säkert djupaste satsen i hela flervariablelanalysen. Att det är så annorlunda mot envariablefallet beror på att vi i det senare fallet har en *huvudsats*: integration är derivation baklänges. Satsen återföres därmed på kedjeregeln för derivata, som är rättfram efter en viss liten omskrivning av derivatans definition.

Men om nu randen för vårt område har en elementär *beskrivning* så finns faktiskt en huvudsats, nämligen Greens formel. Notera analogin. Huvusatsen relaterar funktionsvärdena i intervallets ändpunkter (alltså intervallets rand) till derivatans beteend över hela intervallet. Green jämför integralen över randkurvan av ett plant område med integralen av något slags derivata över området självt.

Det bör inte överraska att Analysens Huvudsats används i beviset för Greens formel.

Vi antar nu att området Ω' i uv–planet berandas av kurvan $\Gamma' : u = u(s), v = v(s)$, $s : s_0 \to s_1$ där ändpunkterna sammanfaller: $u(s_0) = u(s_1); v(s_0) = v(s_1)$. Vi antar att kurvan genomlöpes moturs.

Vi antar nu att området Ω' avbildas bijektivt på Ω i xy–planet under avbildningen $x = x(u, v), y = y(u, v)$ (där komponentfunktionerna är två gånger kontinuerligt deriverbara), med icke-försvinnande Jacobiana. Speciellt kan denna inte byta tecken.

Vi antar vidare att randkurvan till Ω' avbildas på randkurvan Γ till Ω och att även bildkurvan genomlöpes moturs.

Vi studerar nu

$$I = \int\int_{\Omega} f(x, y)dxdy$$

där f är kontinuerlig över hela området. Vi kan (på många sätt) skriva $f(x, y) = \partial F/\partial x$. Greens formel - baklänges! - ger då

$$I = \int_{\Gamma} F(x, y)dy$$

Detta gör vi om till en integral över kurvan Γ':

$$I = \int_{\Gamma'} F(x(u, v), y(u, v))\big(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\big)$$

Vi har här använt kedjeregeln; om du byter dy mot $(dy/ds)ds$ i den första linjeintegralen och du, dv mot $(du/ds)ds$, $(dv/ds)ds$ i den andra - dvs. skriver om bägge som vanliga enkelintegraler - så syns nog vad jag gjorde.

Enligt Greens formel gör vi nu om denna linjeintegral till en dubbelintegral över området Ω', med integranden:

$$\frac{\partial}{\partial u}\big(F\frac{\partial y}{\partial v}\big) - \frac{\partial}{\partial v}\big(F\frac{\partial y}{\partial u}\big)$$

Vi utvecklar båda derivatorna med produktregeln. De båda termer som innehåller F oderiverad kommer att ta ut varandra, eftersom de blandade andraderivatorna av $y(u,v)$ är lika. Vi får alltså kvar följande integrand:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

I detta sätter vi in

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

och

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

varvid de termer som innehåll faktorn $\partial F/\partial y$ tar ut varandra. Vidare minns vi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y).$$

En enkel räkning ger oss kvar integranden:

$$f(x,y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

som är

$$f(x(u,v),y(u,v))\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$$

Här ingår alltså Jacobianan utan belopp. Insättning av funktionen $f(x,y)=1$ visar att Jacboianan (som ju enligt förutsättning aldrig ändrar tecken) måste bli positiv för att båda integralerna ska bli positiva. Detta beror på förutsättningen om lika orienterade randkurvor. Vid motsatt orientering hade vi behövt byta tecken på resultatet. Båda fallen täcks om vi sätter beloppstecken kring Jacobianan.

Anm.: Den skarpögde kanske ser att de sista uträkningarna är ett specialfall av kedjeregeln för Jacobianor:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{d(F,y)}{d(u,v)} = \frac{d(F,y)}{d(x,y)}\cdot\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$$

där

$$\frac{d(F,y)}{d(x,y)} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$$